文章编号:1000-4939(2023)06-1428-09

未知测量噪声下的结构多类型响应重构

史鹏程,彭珍瑞

(兰州交通大学机电工程学院,730070 兰州)

摘 要:针对使用传统卡尔曼滤波(Kalman filter,KF)算法进行结构响应重构时测量噪声方差估计及多类型响应重构难的问题,提出了一种融合噪声方差估计和多类型响应重构的方法。首先在移动窗口卡尔曼滤波算法中引入近似计算的方法,提出递推移动窗口卡尔曼滤波算法(recursive moving-window Kalman filter,RMWKF)实时递推估计测量噪声方差,然后基于有限位置的应变片和加速度传感器的测量数据,并结合模态法对结构各个位置的应变、位移、速度以及加速度响应进行重构。最后对二维桁架和悬臂梁分别进行数值模拟和试验分析,验证了所提方法的有效性。试验结果表明,所提方法能对测量噪声方差进行有效地估计,能实现有效的多类型结构响应重构,同时减小了数据储存空间和计算量。

关键词:噪声递推估计;卡尔曼滤波算法;移动窗口法;多类型结构响应重构

中图分类号:TB22 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2023.06.024

Multi-type structural responses reconstruction with unknown measurement noise

SHI Pengcheng,PENG Zhenrui

(School of Mechanical Engineering,Lanzhou Jiaotong University,730070 Lanzhou,China)

Abstract:In order to solve the problem that it is difficult to estimate the variance of the measurement noise and reconstruct the multi-type response when the traditional Kalman filter (KF) algorithm is used to reconstruct the structural response,a method combining the noise variance estimation and the multi-type response reconstruction is proposed. First,the approximate calculation method is introduced into the moving window Kalman filter(MWKF),and the recursive moving window Kalman filter(RMWKF) is proposed to estimate the real-time noise variance. Then,the strain,displacement,velocity and acceleration responses of each position of the structure are reconstructed by using the measured data of strain gauges and acceleration sensors at limited positions combined with the modal method. Finally,the proposed method are verified by numerical simulation and experimental analysis of two-dimensional truss and cantilever beam respectively. The results show that the proposed method can estimate the variance of measurement noise and can reconstruct multi-type structural responses effectively. Moreover,the data

收稿日期:2021-11-09 修回日期:2022-03-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No.62161018)
通信作者:彭珍瑞,教授,博士生导师。E-mail:pzrui@163.com
引用格式:史鹏程,彭珍瑞.未知测量噪声下的结构多类型响应重构[J].应用力学学报,2023,40(6):1428-1436.
SHI Pengcheng,PENG Zhenrui. Multi-type structural responses reconstruction with unknown measurement noise[J]. Chinese journal of applied mechanics,2023,40(6):1428-1436.

storage space and computation are reduced.

Key words: recursive estimation of noise; Kalman filer; moving window method; multi-type structural response reconstruction

各类结构动态响应的测量数据是进行结构健康监测的基础。目前各种机械、土木工程结构都日益复杂多样,在结构健康监测中所需要安装传感器的数量随之增加。然而,由于传感器安装位置限制以及经济等原因,不可能在所有需要位置都安装传感器,或由于部分传感器长期服役后损坏,从而导致进行结构健康监测所需的数据丢失。因此基于有限的传感器测量数据重构出其他位置各类动态响应的结构响应重构技术就具有十分重要的研究意义[1-3]。

目前针对结构响应重构技术的研究可依据是否基于精确的有限元模型分为 2 类:确定性结构响应重构和不确定性结构响应重构。确定的结构响应重构方法基于精确的有限元模型,建立已知测量响应与待重构响应之间的关系,实现对未知响应的重构,具体方法包括基于模态分析[4-5]、基于传递率矩阵[6-8]、基于经验模态分解[9-10]、基于马尔科夫链[11-12]等方法。但对于一些较为复杂的结构,要获得其精确的有限元模型是较为困难的,且其结构参数在长时间的服役后必然会有所改变。若有限元模型的精度得不到保证,则必然影响结构响应重构的精确性。在不确定性结构响应重构中,不必基于精确的有限元模型,同时考虑到数据采集过程中存在噪声的影响,可以采用卡尔曼滤波、扩展卡尔曼滤波等卡尔曼滤波类算法进行结构响应重构。卡尔曼滤波(Kalman filter,KF)算法是一种采用递推形式的时域滤波方法,能够有效处理模型误差和测量误差,实现对系统状态的最优估计。张笑华等[13]基于 KF 算法对二维桁架的应变和位移响应进行了重构,同时对位移和应变两种传感器的数量和位置进行了优化。XU 等[14]使用 KF 对大跨度悬索桥进行应变、位移、加速度的响应重构,并结合逐步消去法对多类型传感器进行优化布置。任鹏等[15]使用分别增广卡尔曼滤波方法和传递率方法在未知外部激励的情况下对一钢桁架进行了应变响应重构,并对比了 2 种方法的优劣。董康立等[16]基于类卡尔曼滤波算法验证了对外部激励进行重构的有效性,并以响应重构精度为目标使用萤火虫算法和逐步消去法进行传感器优化布置。

以上不确定性的响应重构中,大多基于卡尔曼滤波类算法,在卡尔曼滤波类算法中,系统噪声方差矩阵、测量噪声方差矩阵以及系统的初始状态值等参数对于滤波结果非常重要,使用不准确的噪声方差矩阵会降低滤波的精度,甚至可能导致滤波结果严重发散[17]。在实际测量过程中噪声方差矩阵不是一个固定值,而是随时间不断变化的[18],但现有的基于卡尔曼滤波类算法的结构响应重构中大多将上述测量噪声方差矩阵设置为一个定值,这显然是不准确的。为此,LAI 等[19]采用了移动窗口扩展卡尔曼滤波算法对噪声方差矩阵进行在线估计,用于一个 6 层楼结构的损伤识别,验证了此方法对噪声的强适应性和鲁棒性。ZHANG 等[20]在此基础上使用了移动窗口卡尔曼滤波算法(moving-window Kalman filter,MWKF)对一简支梁的应变和位移信号进行重构。

本研究在上述研究的基础上,针对在使用 KF 算法进行响应重构时,因测量噪声方差无法准确获得,从而造成重构精度降低的问题,引入递推移动窗口卡尔曼滤波法(recursive moving-window Kalman filter,RMWKF),实现了对测量噪声方差的在线递推估计,与 MWKF 相比减小了数据的储存空间和计算量。并结合模态法,在仅使用工程中常用的应变片和加速度传感器的情况下,基于有限点的测量数据对结构各处的应变、位移、速度和加速度响应进行重构,最后对二维桁架和悬臂梁分别进行数值模拟和试验验证。

1　理论基础

1.1　动力学方程离散化

结构的二阶运动方程用模态坐标表示为

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + 2\boldsymbol{\xi}\,\boldsymbol{\omega}_0\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\omega}_0^2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{q}$ 为模态坐标;$\boldsymbol{\xi}$ 为阻尼矩阵;$\boldsymbol{\omega}_0$ 为模态频率矩阵;$\boldsymbol{u}$ 为外部激励向量;$\boldsymbol{L}$ 为激励映射矩阵;$\boldsymbol{\Phi}$ 为模态位移振型矩阵。

将式(1)写成状态空间方程并离散化

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k \end{cases} \tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{x}_k$、$\boldsymbol{z}_k$ 和 $\boldsymbol{u}_k$ 分别为离散后的状态向量、观测向量和外部激励向量；$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为离散化后的状态矩阵和输入矩阵；$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别为输出矩阵和直接传输矩阵；$\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 分别为由于模型的不确定性造成的系统噪声和测量误差造成的测量噪声，分别假设为均值为零的高斯白噪声；方差矩阵分别为 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$。式(2)中的各项具体表示为

$$\boldsymbol{x}_k = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{q}_k \\ \dot{\boldsymbol{q}}_k \end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{e}^{\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{\omega}_0^2 & -2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix}\Delta t} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{\omega}_0^2 & -2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Phi} \\ -\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\omega}_0^2 & -2\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\omega}_0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Phi}$，$\boldsymbol{T}$ 为应变-位移转换矩阵。

1.2 应变-位移转换矩阵

结构的位移可以通过其模态坐标和位移振型的叠加表示为

$$\boldsymbol{d} = \sum_{r=1}^{m} \boldsymbol{\varphi}_r(x)\boldsymbol{q}_r \tag{8}$$

其中：m 为位移模态阶数；$\boldsymbol{q}_r$ 为第 r 阶模态坐标；$\boldsymbol{\varphi}_r(x)$为第 r 阶模态位移振型。

位移和应变之间的关系可以表示为

$$\boldsymbol{s}_x = \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial x} \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{s}_x$ 为 x 方向的应变，将式(8)代入(9)得

$$\boldsymbol{s}_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{r=1}^{m} \boldsymbol{\varphi}_r(x)\boldsymbol{q}_r\right) \tag{10}$$

结构应变可以表示为

$$\boldsymbol{s}_x = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\varphi}_r(x)\boldsymbol{q}_r \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\Psi}_r(x) = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\varphi}_r(x) \tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{\Psi}_r(x)$为应变模态。将式(12)代入式(11)中可得

$$\boldsymbol{s}_x = \sum_{r=1}^{m} \boldsymbol{\Psi}_r(x)\boldsymbol{q}_r \tag{13}$$

由式(8)可得所有已知节点位移可以表示为

$$\boldsymbol{d}_a = \boldsymbol{\varphi}_a\boldsymbol{q} \tag{14}$$

其中：$\boldsymbol{d}_a$ 为所有已知的节点位移；$\boldsymbol{\varphi}_a$ 为已知测点的模态振型矩阵，由于大部分情况下 $\boldsymbol{\varphi}_a$ 都不是方阵，要求解 $\boldsymbol{q}$ 不能直接求逆，因此需两边同时左乘 $\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}$ 得

$$\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_a = \boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_a\boldsymbol{q} \tag{15}$$

式(15)中 $\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_a$ 为方阵，两边同时左乘$(\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_a)^{-1}$得

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_a)^{-1}\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_a \tag{16}$$

将式(16)代入式(11)得

$$\boldsymbol{s}_x = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\varphi}_n(\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_a)^{-1}\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_a \tag{17}$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\varphi}_n(\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_a)^{-1}\boldsymbol{\varphi}_a^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

其中，$\boldsymbol{\varphi}_n$ 为全部节点的模态位移振型矩阵。由此可得到应变位移转换矩阵 $\boldsymbol{T}$。

1.3 KF 算法

卡尔曼滤波算法是一种针对线性系统，基于状态空间方程，通过输入观测数据，对系统状态进行最优估计的算法。其大致可以分为预测和更新 2 个步骤，预测部分生成先验状态估计和先验估计误差协方差；更新部分结合先验估计和卡尔曼增益，生成后验状态估计和后验估计误差协方差。

预测：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k \tag{19}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1|k} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k|k}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q} \tag{20}$$

更新：

$$\boldsymbol{K}_{k+1} = \boldsymbol{P}_{k+1|k}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}_{k+1|k}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}]^{-1} \tag{21}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} + \boldsymbol{K}_{k+1}[\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_{k+1}] \tag{22}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1|k+1} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{C}]\boldsymbol{P}_{k+1|k} \tag{23}$$

其中：$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k}$ 为先验状态估计；$\boldsymbol{P}_{k+1|k}$为先验估计误差方差矩阵；$\boldsymbol{K}_{k+1}$为卡尔曼增益矩阵；$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1|k+1}$ 为后验状态估计；$\boldsymbol{P}_{k+1|k+1}$为后验估计误差方差矩阵；$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 分别为测量噪声方差矩阵和系统噪声方差矩阵。

1.4 MWKF 算法

由于在传统卡尔曼滤波算法中测量噪声方差矩阵 $\boldsymbol{R}$ 常常被定义为一个常量，但实际过程中测量噪声方差是时变的，使用不准确的测量噪声方差会导致滤波精度的降低甚至滤波的严重发散。为了计算出实际测量过程中的测量噪声方差，文献[20]中首

次引入 MWKF 算法对测量噪声协方差进行估计。

由于在响应重构中真实的测量响应是难以获得的,从而各个时刻真实的测量噪声 $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ 也无法准确估计。因此采用测量值的加权平均来近似获得真实响应[20]。

$$z_k^{\mathrm{c}} = \alpha_1 z_{k-1}^{\mathrm{m}} + \alpha_2 z_k^{\mathrm{m}} + \alpha_3 z_{k+1}^{\mathrm{m}} \tag{24}$$

其中:α_1、α_2、α_3 为加权系数;z_k^{c} 表示真实测量响应,从而测量噪声应为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = z_k^{\mathrm{m}} - z_k^{\mathrm{c}} \tag{25}$$

测量噪声的均值 $E(\boldsymbol{\varepsilon}_k)$ 和协方差矩阵估计值 $\boldsymbol{R}_k$ 分别可以写为[19]

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_j) = \frac{1}{N}\sum_{j=k-N+1}^{k}\boldsymbol{\varepsilon}_j \tag{26}$$

$$\boldsymbol{R}_k = \frac{1}{N-1}\sum_{j=k-N+1}^{k}\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_j - E(\boldsymbol{\varepsilon}_j))(\boldsymbol{\varepsilon}_j - E(\boldsymbol{\varepsilon}_j))^{\mathrm{T}}\right] \tag{27}$$

其中,N 为统计样本个数。

在计算最终的测量噪声方差时将多个移动窗口进行加权平均处理,即

$$\hat{\boldsymbol{R}}_k^{\mathrm{a}} = \gamma_1 \hat{\boldsymbol{R}}_{k1} + \gamma_2 \hat{\boldsymbol{R}}_{k2} + \cdots + \gamma_i \hat{\boldsymbol{R}}_{ki} \tag{28}$$

其中:γ_i 为加权系数;i 为采样窗口个数,计算如下

$$\gamma_i = \frac{1/\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{R}}_{ki})}{1/\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{R}}_{k1}) + 1/\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{R}}_{k2}) + \cdots + 1/\mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{R}}_{ki})} \tag{29}$$

其中, $\mathrm{tr}(\cdot)$ 为计算矩阵的迹。

1.5　RMWKF 算法

在上述 MWKF 算法中,由于求解最终的测量噪声方差时,采用了加权平均处理,从而导致数据的储存空间和计算量大大增加。为了减小数据的存储和计算量,引入了递推估计的方法,实现了对于测量噪声方差的递推估计。将式(27)拆分为

$$\boldsymbol{R}_k = \frac{1}{N-1}\sum_{j=k-N+1}^{k-1}\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_j - E(\boldsymbol{\varepsilon}_j))(\boldsymbol{\varepsilon}_j - E(\boldsymbol{\varepsilon}_j))^{\mathrm{T}}\right] + \frac{1}{N-1}\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_k - E(\boldsymbol{\varepsilon}_k))(\boldsymbol{\varepsilon}_k - E(\boldsymbol{\varepsilon}_k))^{\mathrm{T}}\right] \tag{30}$$

根据式(27)可知 $\boldsymbol{R}_{k-1}$ 为

$$\boldsymbol{R}_{k-1} = \frac{1}{N-1}\sum_{j=k-N}^{k-1}\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_j - E(\boldsymbol{\varepsilon}_j))(\boldsymbol{\varepsilon}_j - E(\boldsymbol{\varepsilon}_j))^{\mathrm{T}}\right] \tag{31}$$

式(31)可以近似写为

$$\boldsymbol{R}_{k-1} = \frac{1}{N-2}\sum_{j=k-N+1}^{k-1}\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_j - E(\boldsymbol{\varepsilon}_j))(\boldsymbol{\varepsilon}_j - E(\boldsymbol{\varepsilon}_j))^{\mathrm{T}}\right] \tag{32}$$

综合式(30)和式(32), $\boldsymbol{R}_k$ 的递推估计为

$$\boldsymbol{R}_k = \frac{N-2}{N-1}\boldsymbol{R}_{k-1} + \frac{1}{N-1}\left[(\boldsymbol{\varepsilon}_k - E(\boldsymbol{\varepsilon}_k))(\boldsymbol{\varepsilon}_k - E(\boldsymbol{\varepsilon}_k))^{\mathrm{T}}\right] \tag{33}$$

由以上对测量噪声方差矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 的递推过程可以看出,RMWKF 相比于 MWKF[20] 实现了对测量噪声方差的在线递推估计,k 时刻的测量噪声方差 $\boldsymbol{R}_k$ 可由 $k-1$ 时刻的测量噪声方差 $\boldsymbol{R}_{k-1}$ 和 k 时刻的噪声值及均值递推得到。在保持与 MWKF 算法重构精度相近的前提下,RMWKF 只需计算 k 时刻测量噪声及其均值,结合 $k-1$ 时刻的测量噪声方差即可算得 k 时刻的测量噪声方差,但 MWKF 则需要对窗口内 N 个数据进行计算处理。显然,相比于 MWKF,RMWKF 具有计算量小和占用储存空间小的优势。

1.6　结构响应重构

运用上述递推移动窗口卡尔曼滤波算法进行状态的预测和更新,可以得到响应重构方程,即

$$\begin{cases} z_k^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{C}_s^{\mathrm{e}} \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{D}_s^{\mathrm{e}} \boldsymbol{u}_k \\ z_k^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{C}_s^{\mathrm{e}} \hat{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{D}_s^{\mathrm{e}} \boldsymbol{u}_k \end{cases} \tag{34}$$

其中:z_k^{r} 和 z_k^{e} 分别为需要重构位置的真实计算响应和重构响应,其中包括应变响应、速度响应和加速度响应;$\boldsymbol{C}_s^{\mathrm{e}}$ 和 $\boldsymbol{D}_s^{\mathrm{e}}$ 分别表示需要重构位置的输出矩阵和传输矩阵,分别为 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的子矩阵,下标 s 为选择的模态,在实际使用中只需考虑对响应贡献较大的前几阶模态。求解出结构的应变响应后,可通过位移与应变之间的关系,对结构的位移进行重构。根据模态叠加原理,结构位移和应变分别可以表示为

$$\boldsymbol{d}_{n_{\mathrm{d}}} = \boldsymbol{\Phi}_{n_{\mathrm{d}}\times m} \cdot \boldsymbol{q}_m \tag{35}$$

$$\boldsymbol{s}_{n_{\mathrm{e}}} = \boldsymbol{\Psi}_{n_{\mathrm{e}}\times m} \cdot \boldsymbol{q}_m \tag{36}$$

其中:n_{d} 表示结构自由度数;n_{e} 表示结构单元数;m 表示所选取的模态阶数;结合式(35)和(36)可以直接通过应变响应求出结构的位移响应为

$$\boldsymbol{d}_{n_{\mathrm{d}}} = \boldsymbol{\Phi}_{n_{\mathrm{d}}\times m} \cdot \boldsymbol{\Psi}_{n_{\mathrm{e}}\times m}^{+} \cdot \boldsymbol{s}_{n_{\mathrm{e}}} \tag{37}$$

其中,上标 + 表示求伪逆。

由于结构应变和加速度两种响应在数量级上相差很大,这会引起输出矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的高度病态,导致卡尔曼滤波结果的不准确,因此要对输出矩阵进行规则化处理后代入卡尔曼滤波算法进行计算

$$\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{m}} = (\boldsymbol{R}_k)^{-1/2}\boldsymbol{C}^{\mathrm{m}} \tag{38}$$

2 数值模拟

采用二维桁架数值模拟整个响应重构过程，以验证所提方法的有效性。如图1所示，该桁架结构有14节点，25个单元和25个自由度。弹性模量、密度和泊松比分别为210 GPa、7 850 kg/m³和0.3。选取前六阶模态振型为目标模态进行响应重构，前六阶振型频率分别为17.72、58.89、85.48、113.67、169.98、220.22 Hz。其中前六阶振型的具体形式分别为第一、第四和第六阶为对称垂向弯曲；第二和第五阶为反对称垂向弯曲；第三阶为横向拉伸。在第4节点的Y方向施加随机激励，激励的频带宽度为10～250 Hz，最大值为35 N。按照文献[16]中所提出的逐步消去法优化布置传感器的布置，在第10、11、15和第16单元布置4个应变片，第3和第4个节点的Y方向布置2个加速度传感器。利用状态空间方程式(34)算出布置传感器处的真实计算响应，并在计算的应变和加速度值中分别加入均值为0，方差为1×10^{-14}和2.56的高斯白噪声作为测量响应。

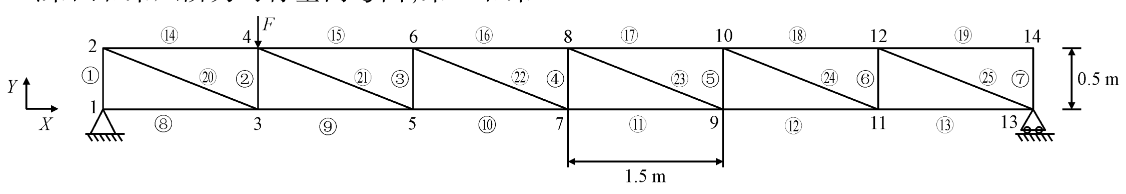


图1 二维桁架结构

Fig. 1 Two-dimensional truss structure

图2给出了第11单元的应变以及4节点的Y方向的加速度响应使用RMWKF算法计算的测量噪声方差的变化情况，从图中可以看出传感器的测量噪声方差随着时间不断变化，计算的噪声方差在整个过程中围绕预设的真实值上下波动，由此可知使用RMWKF算法估计的测量噪声方差是接近预设值的，可以用于后续的响应重构计算。

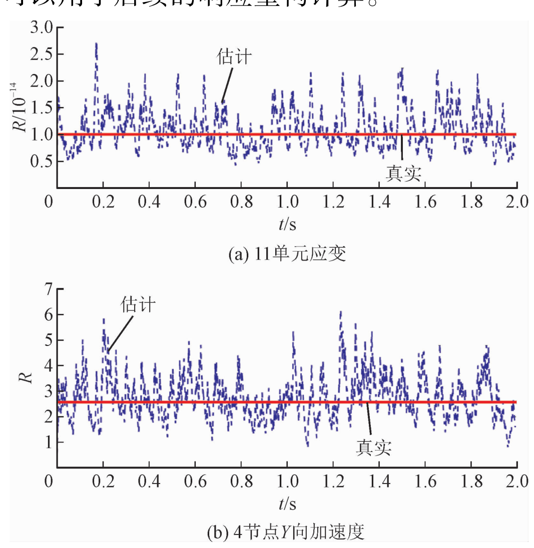


图2 传感器测量噪声方差

Fig. 2 Covariance of estimated measurement noise

为了验证RMWKF算法在实际计算测量噪声方差时，相比于MWKF算法是否拥有计算量小和占用储存空间小的优势。在保证计算精度的前提下，分别对于不同测量长度的测量数据进行测量噪声方差计算，实验测试环境为：AMD Ryzen 53500U处理器，8G内存，基于MATLAB 2018a环境采用M语言编写算法，窗口长度N设定为20，运行时间结果如表1所示。可以看出RMWKF算法对于同一长度的测量数据，计算时间仅为MWKF算法的三分之一左右，进一步验证了RMWKF具有计算量小和占用储存空间小的优势。

表1 2种算法运行时间对比(单位：s)

Tab. 1 Comparison of running time of two algorithms (unit：s)

算法	数据长度				
	4 000	8 000	20 000	40 000	50 000
RMWKF	0.109	0.213	0.460	0.767	0.874
MWKF	0.304	0.553	1.216	2.041	2.553

将RMWKF算法的重构效果与相同条件下使用KF和MWKF算法进行重构的效果进行对比，使用相对百分比误差P_{RE}来衡量各自重构的精度，且

$$P_{RE}=\frac{\text{std}(z^e-z^r)}{\text{std}(z^r)}\times100\% \tag{39}$$

图3是分别采用KF、MWKF以及RMWKF进行响应重构的各个单元以及节点的各类响应的P_{RE}的对比结果，在测量噪声方差未知的情况下采用RMWKF响应重构的P_{RE}要略低于采用KF响应重构的P_{RE}，与采用MWKF进行重构的相对百分比误差相近。图4所示是结构各处的响应，采用RMWKF进行响应重构的各类响应时程与计算响应时程吻合良好，可以用于测量噪声方差未知情况下的响应重构计算。

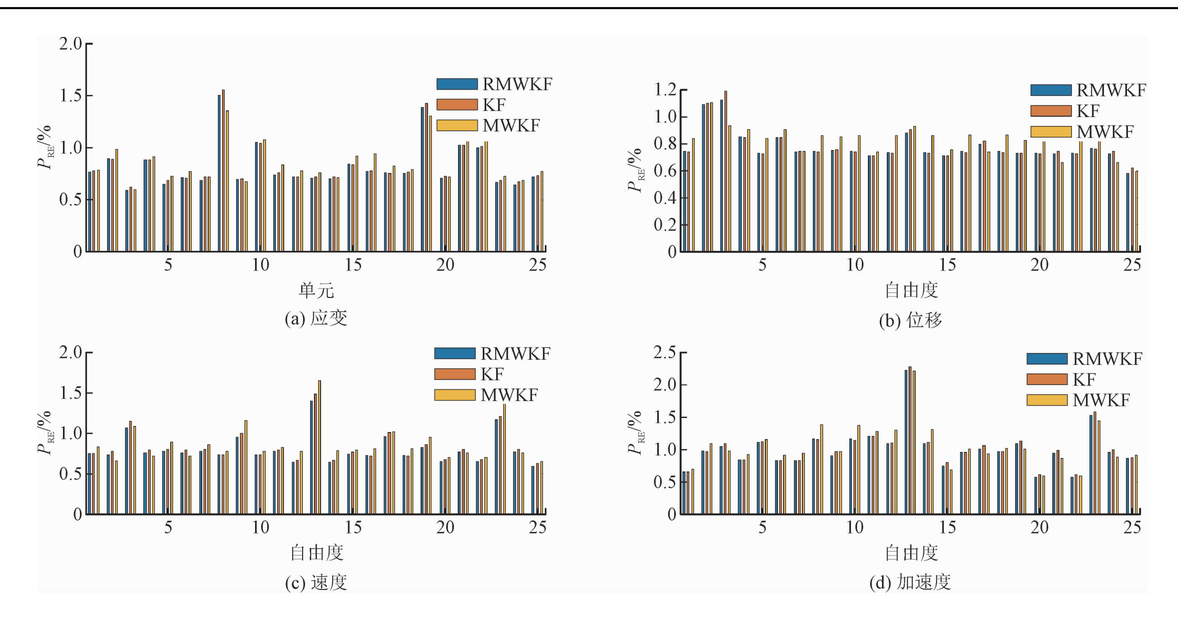


图 3　相对百分比误差

Fig. 3　Relative percentage errors

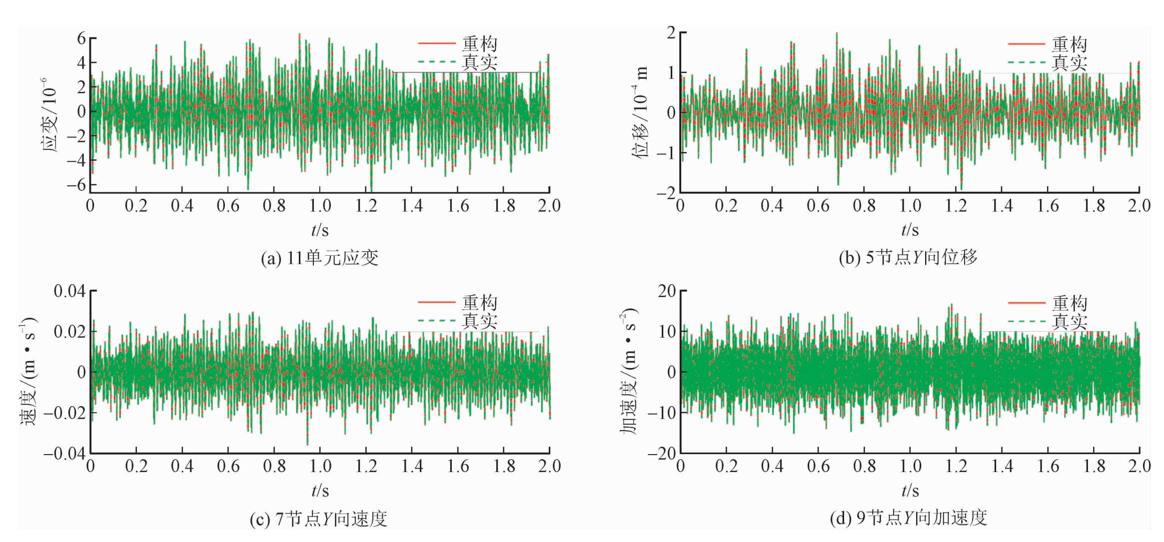


图 4　重构响应与计算响应对比

Fig. 4　Comparison of reconstruction and computational responses

3　试验验证

使用图 5 所示悬臂梁作为试验对象,进一步对以上方法进行试验验证。悬臂梁尺寸为 600 mm × 50 mm × 7.8 mm,弹性模量为 128 GPa,密度为 6 440 kg/m^3,泊松比为 0.3。将悬臂梁分为 12 个单元,13 个节点和 24 个自由度。选取前四阶模态振型为目标模态进行响应重构,前四阶振型频率分别为 15.73、96.38、274.92、543.18 Hz。其中前四阶振型的具体形式分别为:第一阶为垂向单向弯曲,第二阶为垂向双向弯曲,第三阶为反对称垂向弯曲,第四阶为对称垂向弯曲。在节点 9 的 Y 方向施加激励,激励时程曲线如图 6 所示。按照与数值模拟中相同的逐步消去法确定传感器的位置,如图 7 所示,在第 5 个单元布置一个应变片,第 9、第 10 以及第 13 个节点布置 3 个加速度传感器。并在已布置传感器的基础上,在第 2 个单元和第 7 个节点分别布置一个应变片和一个加速度传感器作对比以检验重构效果。试验所采用的应变片型号为 BFH120-3AA;应变调理器型号为 INV1861A;加速度传感器型号为 ICP 型的 INV9821;网络分布式采集仪为北京东方振动和噪声技术研究所的 INV3062-C2。



图 5 悬臂梁实物

Fig. 5 Cantilever beam

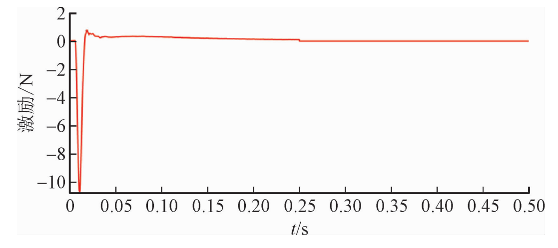


图 6 激励

Fig. 6 Excitation

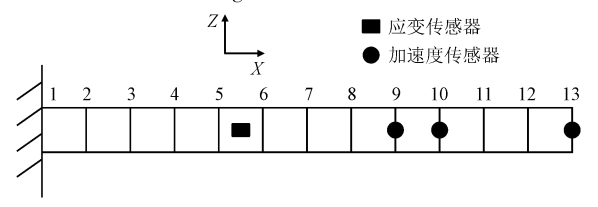


图 7 传感器布置位置图

Fig. 7 Location of sensor arrangement

为保证动应变的测量精度,应注意以下方面:①将胶粘剂均匀地涂抹在完好的应变片上,将应变片粘贴在经过单向打磨光滑并清洗的被测结构表面,并对其表面进行涂覆保护;② 采用温度补偿应变片来降低温度效应对测试结果的影响;③根据被测结构的受力确定粘贴位置和电桥的组成方式,消除附加载荷,测取单一载荷;④确保信号采集盒接地,应变调理器调平衡,测试系统调零,再进行动应变测量。

虽然传感器附加质量与悬臂梁整体质量相比较小,但是在试验过程中仍然会对梁的局部模态造成一定的影响。以下两个方面尽量减小传感器附加质量带来的影响。①测量时尽量选择质量更轻的传感器,并用动力学修改预测软件来消除附加质量带来的影响,即在传感器测量位置添加一个相同质量的“负质量”来消除此影响;②由于采用基于卡尔曼滤波的不确定性响应重构方法,可允许有一定的建模误差,附加质量不会对最终重构结果造成较大的影响。

在根据式(24)计算真实响应时,加权系数 α_1、α_2、α_3 分别取 1/6、2/3、1/6;在计算测量噪声方差的数据统计样本个数 N 取 20。图 8 给出了位于 5 单元和 9 节点的一个应变片和一个加速度传感器测量时测量噪声方差的变化曲线。

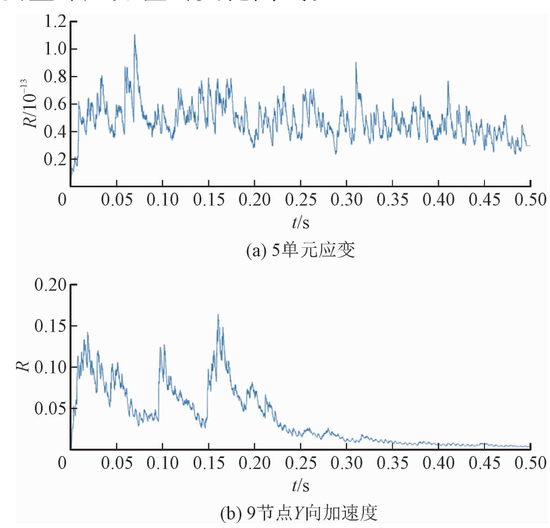


图 8 传感器测量噪声方差

Fig. 8 Covariance of estimated measurement noise

基于 RMWKF 对测量噪声方差估计后进行响应重构计算,并分别与使用 KF 和 MWKF 重构的结果对比。表 2 列出了部分单元和节点重构信号的相对百分比误差。

表 2 相对百分比误差

Tab. 2 Relative percentage errors

单元/节点号	P_{RE}/%		
	KF	MWKF	RMWKF
应变			
2	0.52	0.23	0.22
9	3.33	1.25	1.24
位移			
7	0.30	0.11	0.15
11	0.22	0.07	0.07
速度			
7	1.43	0.61	0.61
11	0.71	0.30	0.30
加速度			
7	5.82	2.09	2.09
11	3.81	1.38	1.38

从表 2 中可以看出采用 RMWKF 进行响应重构的结果的精度与使用 MWKF 的精度类似,同时优于 KF 的精度,证实了采用移动窗口法对于测量噪声方差进行实时估计的重要性。图 9 和图 10 分别给出了重构响应与测量响应和计算响应的对比,使用 RMWKF 结合模态法的响应重构方法可以仅在使用应变片和加速度传感器的情况下,实现对于结构各处的应变、位移、速度和加速度信息的重构。重构的

信号数据与传感器测量数据、真实计算数据吻合良好,可以重构出未布置传感器处的结构的各类真实响应。

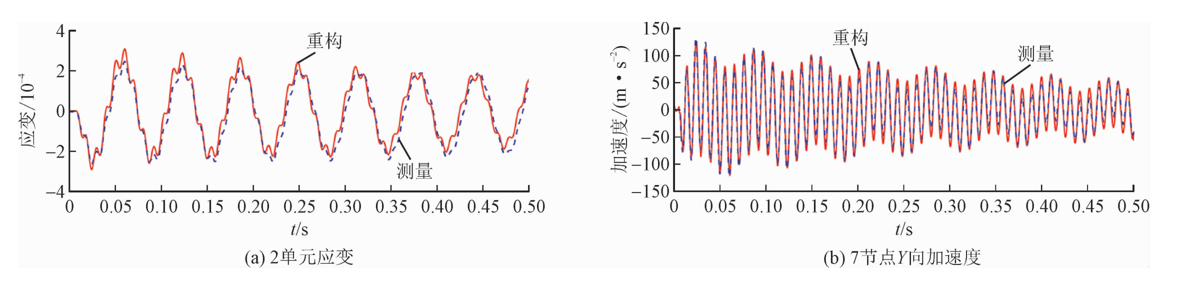


图 9　重构响应与测量响应对比

Fig. 9　Comparison of the reconstruction and measured responses

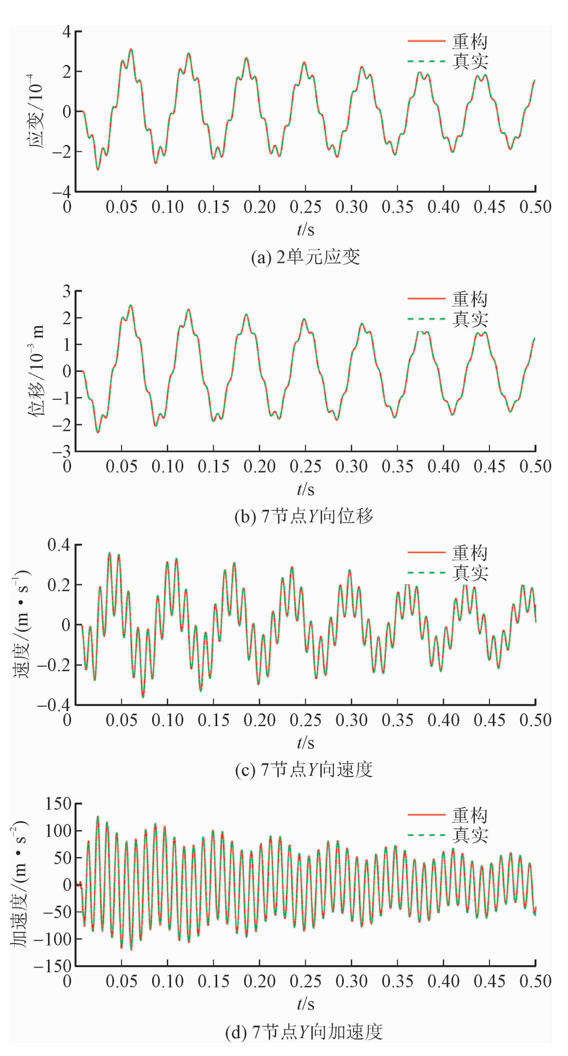


图 10　重构响应与计算响应对比

Fig. 10　Comparison of the reconstruction and computational responses

4　结　论

1)在仅使用应变片和加速度传感器的情况下,使用 RMWKF 结合模态法可以重构出结构各点的应变、位移、速度以及加速度响应,且各类重构的响应与计算以及测量响应均吻合良好。

2)基于 RMWKF 算法可对测量噪声方差进行实时估计,估计结果基本接近预设值,与固定的测量噪声方差相比,使用时变的测量噪声方差更符合工程实际,且相比于 MWKF 算法,其具有计算量小和占用储存空间小的优势。

3)相比于使用 KF 进行响应重构,RMWKF 可在测量噪声方差未知的情况下进行结构响应重构,且数值算例和试验皆验证了使用 RMWKF 的重构精度与使用 MWKF 重构的精度相近,相比使用 KF 重构的精度要更高。

本研究的数值算例和实验对象结构相对简单,作者正在此基础上进一步拓展研究,将本研究所述的方法应用于大型复杂结构中,以验证应用于工程实际中的可靠性。

参考文献:

[1]　HONG Y H, KIM H K, LEE H S. Reconstruction of dynamic displacement and velocity from measured accelerations using the variational statement of an inverse problem[J]. Journal of sound and vibration, 2010, 329(23): 4980-5003.

[2]　SUN L M, LI Y X, ZHU W, et al. Structural response reconstruction in physical coordinate from deficient measurements[J]. Engineering structures, 2020, 212: 110484.

[3]　胡杰,范宣华. 一种时域载荷识别数值算法及其不适定性研究[J]. 应用力学学报, 2017, 34(2): 324-328.
HU Jie, FAN Xuanhua. Ill-posedness research of a load identification method in time domain[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2017, 34(2): 324-328(in Chinese).

[4]　KAMMER D C. Estimation of structural response using remote sensor locations[J]. Journal of guidance, control and dynamics, 1997, 20(3): 501-508.

[5]　ZHANG X H, XU Y L, ZHU S Y, et al. Dual-type sensor placement

for multi-scale response reconstruction[J]. Mechatronics,2014,24(4):376-384.

[6] LAW S S,LI J,DING Y. Structural response reconstruction with transmissibility concept in frequency domain[J]. Mechanical systems and signal processing,2011,25(3):952-968.

[7] LI J,LAW S S. Substructural response reconstruction in wavelet domain[J]. Journal of applied mechanics,2011,78(4):041010.

[8] RIBEIRO A M R,SILVA J M M,MAIA N M M. On the generalisation of the transmissibility concept[J]. Mechanical systems and signal processing,2000,14(1):29-35.

[9] WAN Z M,LI S D,HUANG Q B,et al. Structural response reconstruction based on the modal superposition method in the presence of closely spaced modes[J]. Mechanical systems and signal processing,2014,42(1/2):14-30.

[10] HE J J,GUAN X F,LIU Y M. Structural response reconstruction based on empirical mode decomposition in time domain[J]. Mechanical systems and signal processing,2012,28:348-366.

[11] WANG J,LAW S S,YANG Q S. Sensor placement method for dynamic response reconstruction[J]. Journal of sound and vibration,2014,333(9):2469-2482.

[12] 王娟,杨庆山. 基于状态空间的时域动态响应重构方法[J]. 建筑结构学报,2016,37(增刊1):460-466.
WANG Juan,YANG Qingshan. Dynamic response reconstruction method in time domain based on state space[J]. Journal of building structures,2016,37(S1):460-466(in Chinese).

[13] 张笑华,任伟新,方圣恩. 两种传感器的位置优化及结构多种响应重构[J]. 振动与冲击,2014,33(18):26-30.
ZHANG Xiaohua,REN Weixin,FANG Sheng'en. Location optimization of dual-type sensors for multi-kind structural response reconstruction[J]. Journal of vibration and shock,2014,33(18):26-30(in Chinese).

[14] XU Y L,ZHANG X H,ZHU S Y,et al. Multi-type sensor placement and response reconstruction for structural health monitoring of long-span suspension bridges[J]. Science bulletin,2016,61(4):313-329.

[15] 任鹏,周智,白石,等. 桁架结构疲劳监测的应变响应估计方法研究[J]. 工程力学,2018,35(9):114-125.
REN Peng,ZHOU Zhi,BAI Shi,et al. Research on a strain response estimation method for truss structure fatigue monitoring[J]. Engineering mechanics,2018,35(9):114-125(in Chinese).

[16] 董康立,殷红,彭珍瑞. 面向多类型传感器优化布置的结构响应重构[J]. 控制理论与应用,2018,35(9):1339-1346.
DONG Kangli,YIN Hong,PENG Zhenrui. Structural response reconstruction oriented to optimal multi-type sensor placement[J]. Control theory & applications,2018,35(9):1339-1346(in Chinese).

[17] SONG M M,ASTROZA R,EBRAHIMIAN H,et al. Adaptive Kalman filters for nonlinear finite element model updating[J]. Mechanical systems and signal processing,2020,143:106837.

[18] 王向华,覃征,杨新宇,等. 基于两次Kalman滤波的观测噪声自适应调整算法[J]. 系统工程与电子技术,2010,32(2):232-234.
WANG Xianghua,QIN Zheng,YANG Xinyu,et al. Adaptive algorithm for adjusting observation noises based on double-Kalman filter[J]. Systems engineering and electronics,2010,32(2):232-234(in Chinese).

[19] LAI Z L,LEI Y,ZHU S Y,et al. Moving-window extended Kalman filter for structural damage detection with unknown process and measurement noises[J]. Measurement,2016,88:428-440.

[20] ZHANG X H,WU Z B. Dual-type structural response reconstruction based on moving-window Kalman filter with unknown measurement noise[J]. Journal of aerospace engineering,2019,32(4):04019029.

(编辑 史淑英)